الشوّاش والكسوريّات
حيث الفيزياء وجاذِبها العجيب

محسن زهران، أستاذ الفيزياء في جامعة المنصورة، مصر

"ضاعت المملكة وقتل الملك بسبب خسارة معركة، وحدثت هذه الخسارة لأن الفارس قد هزم، وانهزم الفارس بسبب عدم اتّزان فرسه، الذي كان يعاني من حدوته، والحدوة لم تكن مُثبَّتةً بسبب مسمارٍ صدِئ

أوّلًا: مقدّمة

تُـصنَّف الفيزيـاء في المـرتبة الثـانية بعـد الرياضيات كعلـم وصـل إلـى مرحـلة منـطقية قائـمة علـى الـملاحظة والتجربة واستنتاج العلاقـات الرياضية التي تحكـم بـعض الظواهر الفيزيـائية، وقد تـمّ ذلك على يـد العالِـم الإيطـالي جاليليـو (1564-1642) عـملاق العلـم .فالعلـم بشـكل عـام، والفيزياء بشـكل خاص، مـدين بشـكل أسـاسي لـهذا العالِـم لقدرتـه الفذة علـى التفكير المخـالف للفطـرة والطبيـعة الظاهرة للأشيـاء، ولقدرته الفائقة علـى تحليل حركة السقوط الحـر للأجسـام المختلفة الشـكل والكتـلة في مجال الجـاذبية عندمـا تكون المنظـومة الفيزيـائية معزولةً عن محيطهـا. وقـد اتضـح ذلك عندمـا بيّن أنـه إذا تمّ تجاهـل تأثيـر مقاومة الهـواء، فإن المطـرقة تسقط بالطـريقة نفسـها التي تسقط بهـا ريشة الطائر. ثم جـاء العبقـري نيـوتن (1642-1727) الذي صـاغ قانون الجـاذبية العـامة القائـل بأن كلّ جسيـم في الكـون يجذب الجسيمـات الأخـرى بقـوة تتنـاسب عكسًـا مع مربـع المسـافة التي تفصلـه عنها

$$F_g = G\frac{M_1 M_2}{R^2}$$

حيث M_2، M_1 كتلتـا الجسيـمَين المتجـاذبَين Rg المسـافة بينهما وG ثابت الجـاذبيّة العام. أعطى هذا القانـون عمـوميةً لفهم الكـون بأكمله وأسّـس إطارًا جديـدًا للفكـر، حيث قـدّم نيـوتن في كتابـه المبادئ (البرنسيبيـا) فكرةَ كون الظواهـر الفيزيائية محكومة عمومًـا بقـوانين ريـاضية صـارمة يمـكن صياغتهـا والتنبؤ بهـا. وهــكذا، بـدأت المعادلات الريـاضية تحل محـل التصـورات الهندسية المعقدة، خـاصة مع ابتكار طـريقة التفاضل والتكامـل لصياغتهـا. وبمجرد العثور على المعـادلات الحاكـمة للظواهر الطبيـعية، أمكن استنباطُ العديـدِ من حلولها في صيغ رياضية محكمة ومثيـرة تعـطي تنبّؤاتٍ حتـميةً (deterministic) لأي نقـطة في المستقبل

وكـم سيكون رائعاً أن تكون لدينا آلية يمكنها الحصول على موضع وسـرعة الجسـم المتحـرك بدقة عـالية للغاية، بدءاً من لحظة انطلاقه وفهم شـروطه الأولية حتـى وصوله إلـى هدفه أو حالتـه النهائية. وتـحت وطأة إنجـازات نيـوتن والسـحر الذي بنـى به أجندتَـه العلـمية، كانت مفرداتـه هي أن الكـونَ إلهٌ عـملاقٌ مُنظَّـم، يحـدِّد مستقبلَه سـلفًا حاضـرُه، كما كانت أحداثُـه في المـاضي تحكمها قـوانين السببية (cause-effect rule) في أن الـسببَ يـسبق نتيجتَـه، خـاصة وأن الـعلاقة الـسببية دالّةٌ متبـاينة (one to one map) ، غالبًـا مـا تكون خـطّيّةً linear ما يعني أن أيَّ خـطأ في قيـاس الشـروط الأولية لمنظـومة ديناميـكيّة لن يؤدي إلـى أخطـاء كبيـرة في قياس حالتـه النهـائية. بـلغت هذه المـوجة من الفلـسفة المـادية ذروتهـا بإعلان لابلاس أن كل جسيـم في الكـون، من أكبر نجم إلى أصغـر ذرة في الكون، مقيّدٌ بالقـوانين الفيزيـائية التي يخضـع لهـا، وصـولا إلى أصغـر التفاصيل، لِيَنتجَ لنا وبكل دقة حسـابُ مستقبله وكأن القـوانين المستخـدمة مُنزَّهة عن الخـطأ

”لا يوجد خطأ أكبر في العلم من الاعتقاد بأن مجرّدَ إجراء عملية رياضية سيجعل ظاهرةً ما في الطبيعة مؤكدة“

لـكن الأمـور لـم تسـر كمـا كانت الفيزيـاء الكلاسيكية تأمل، وظهر العديدُ من السـحب السوداء فـوق إطارها الفكـري، مثل النظـم الفيزيـائية التي

تتكون من أعداد كبيرة من الجزيئات، مثل غاز في صندوق مغلق، أو رمي آلاف قطع النرد. يتم التعامل مع هذه النظم الكبيرة واللامتناهية باستخدام علم الإحصاء لربط الحالات الجزيئية للغازات بخصائصها الفيزيائية المرئية والقابلة للقياس (مثل الضغط ودرجة الحرارة) عن طريق أخذ المتوسطات أو الاحتمالات. ولذلك تم إنشاء الأساليب الإحصائية كنظيرٍ للطرق التجريبية النظرية، إذ نجحت الأخيرة في وصف النظم البسيطة بعددٍ صغيرٍ من درجات الحرية، تاركة وصف النظم الكبيرة للطرق الإحصائية، وأصبح حكمُ الطرق الإحصائية قطعيَّ الدلالة وواضحًا وجديراً بالثقة في أعمالٍ عديدة كتلك الخاصّة بشركات التأمين وأصحاب الكازينوهات

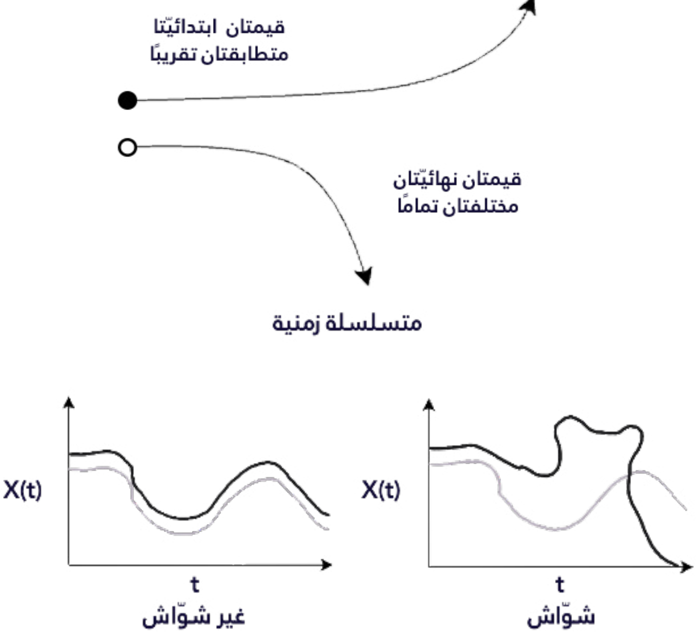
ومن الواضح أنه في المواقف الحقيقية، فإن البيانات الأولية لجميع النظم الطبيعية ستكون عرضةً للشك وعدم الدقة، حتى لو تم قياسها بدقّةٍ إلى حد ما، ولكنّ افتراضَ عدم الدقة أو الجهل البسيط بالحالة الأولية للمنظومة سوف يُترجَم إلى جهلٍ بسيط ومُسيطَرٍ عليه عند تحديد الحالة النهائية أو مصير المنظومة. ولذلك فمن الطبيعي أن تتراكم الأخطاء أو عدم الدقة عند قياس حركة المنظومة مع مرور الوقت، ولكن الأهم من ذلك أنها تزيد تقريبًا بما يتناسب مع تدفق الوقت، وبالتالي يمكن تحديدها والتنبؤ بها

لكن العجيب أن هناك نظمًا فيزيائية ذات هياكل وأوصاف بسيطة تمردت على فيزياء لابلاس-نيوتن وأظهرت سلوكًا بقدر كبير من الإبداع أو العشوائية الخلّاقة مع تطورها عبر الزمن. وفي مثل هذه النظم يتضاعف تأثير عدم الدقة في قياس قيم الحالة الأولية، بحيث تكون القيمةُ في لحظة وسطية مساويةً لتراكم كافة الأخطاء في لحظات سابقة في تطورها، فيصبحَ الخطأُ هو السائد وتغدو القدرةُ على التنبؤ بمصير الحالات مستحيلة. ولذلك فإن القيمة الأولية لخطأ القياس، حتى لو كانت جزءاً واحداً من المليار، سوف تتسع بسرعة إلى حد الهلاك لدرجةٍ تعصف بتحديديّة المنظومة

ثانيًا: النظم الشوّاشة

أهم ملامح هذه النظم هي:

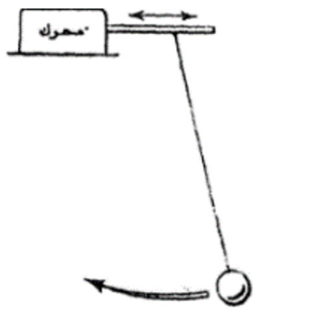
- المعادلات الرياضية الحاكمة حتميّاً تكون غير خطية (Nonlinear).
- لها حساسية مفرطة تجاه قياس الشروط الابتدائيّة للمنظومة (ظاهره جناح الفراشةButterfly effect).
- لها ما يسمى بالتغذية الراجعة الموجبة أي أن مَخرَجات مرحلة معينة هي مَدخلات المرحلة التالية(feedback effect)
- الاعتماد المُفرَط على تغيّر قيم بعض البارمترات الفيزيقية، مثل تردد مصدر التغذية القصرية للنظام أو قيمة معامل الإخماد أو الاحتكاك، من أجل تحقيقها فيما يخصّ الحساسيةَ للشروط الأولية، فإن الشكل (1) يوجزها



الشكل 1: تميُّز النظم الشوّاشة باعتمادِ سلوكها كثيرًا على قيم الشروط الابتدائيّة.

تـعني هذه الفكـرة أن نقــطتين ابتــدائيتين متقــاربتين لمنظــومة مــا قــد تؤولان لحلــول مختلفة كليــاً. كمثــالٍ تبسيــطي عن هذه الفكــرة قـمْ بإلقاء قطــعتَين من الورق المقوى في المكان نفســه تقريباً في منتــصف مجرى تيارٍ مــائي ذي ســريان مضطرب ولاحظْ بعــد فتــرة زمنية مســارَ الحــركة لــكلّ منهما. ســوف تجد أن مســارَيهما كانــا متقــاربَين في البداية وبعد فترة ذهبت كلّ ورقةٍ في مســار مختلف مبتعدةً عن الأخــرى. هذه من أهــم ســمات النظــم الفوضوية (الشــوّاش) في أن اختلافــاً طفيفًا في بــداية التجربة قــد يؤدي إلــى حلّ وســلوك مختلف تمامــاً عن الآخر، حتــى وإن كان الفــرق جزءاً واحــداً من المليــار في قراءات الشــروط الابتــدائيّة

ومن خلال التجــربة التــالية، يمكننــا بســهولة فهــم ميزة أخرى للنظم الشــوّاشة. لنفتــرض أن لدينا نوّاسًــا (بنــدولًا) كرويّــا كما هو مبين في الشــكل (2)



الشكل 2: نوّاس-بندول كروي

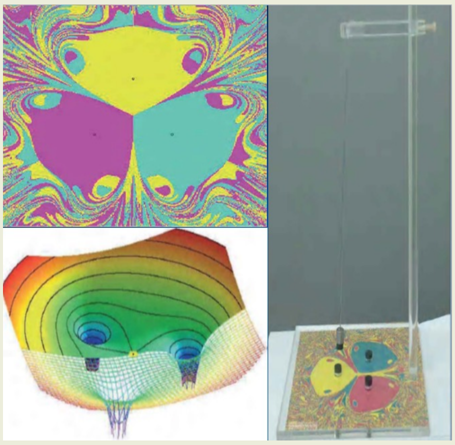
وهــو نوّاس يتكون من ســلك معدني رفيــع مثبت من أعلــى بطــرفِ جهــازٍ مُولِّــد للذبذبــات والطــرف الأخر مُعلَّقة به كرة معدنية حرّة الحركة ترســم ســطح كرة. مــا إن يبدأ الــمُتذبذب في الحــركة أفقياً بتــردّد معين عنــد نقــطة التعــليق في اتجــاه أفقي فإن البنــدول سيبــدأ في الاهتزاز والتأرجــح ذهابــاً وإيابــاً مــمثِّلاً للحــركة التــوافقية البسيــطة المستقــرة على مســار شبه إهليجي ذي دورةٍ تســاوي تردّدَ المتذبذب. عجيبٌ الأمــر أن المنظــومة تــوصف بمعادلات بسيــطة ذات درجــات حرية قليــلة لا تتعدّى 3 درجــات وتصف بنجاح

تجربه مخبريّة جميلة لفهم حساسية الشروط الابتدائيّة وفضاء الطور الجاذب

- التجــربة عبــارة عن بنــدول فيزيائي مكــوّن من كرة وخيــط، حيث الخيــط مثبت من طرف وبــه كرة معدنية قابلــه للاهتزاز من الطــرف الأخر

- تُثبَّت عنــد قاعــدة البنــدول ثلاثة مغانط عند رؤوس مثــلث متســاوي الأضلاع كما هو موضح بالشــكل (3)

- تبــدأ التجــربة من موضــع معيّن معــروف في فضاء الطــور ونتــرك الكــرة تــحت تأثيــر الحــركة الاهتزازية وقــوة الجذب المغناطيــسي للمغانــط، ونسجّل تطوّرَ البنــدول ونقــطة اتزانــه الأخير عند أحــد المغانط. من الجميــل أنه بتكرار التجــربةِ من نقطة البداية نفســها فإننــا نحصل علــى نتائج مختــلفة ما يؤكّد حســاسيةَ البنــدول للشــروط الابتــدائية وأيضــاً عــدمَ القــدرة علــى التنبؤ بانتظــام بالرغــم من بســاطة المنظــومة الديناميــكية من حيث درجات الحــرية ووجود معادلات الحــركة المُفسِّــرة لها

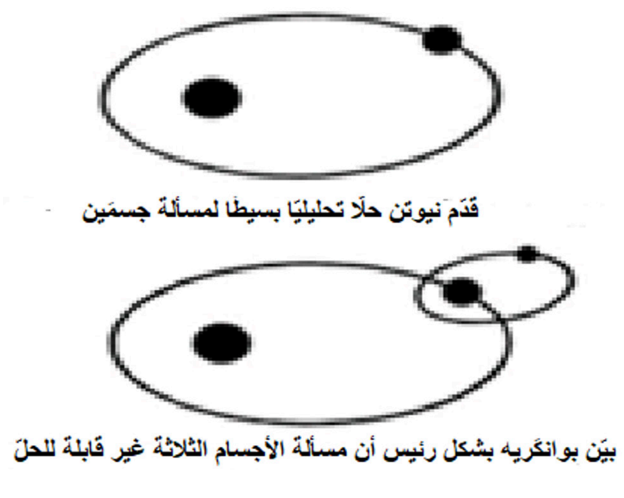


الشكل 3: بالرغم من الابتداء بالنقطة نفسِها تقريبًا فإننا ننتهي إلى نتائج مختلفة.

الحركة الترددية المنتظمة الناتجة، أي أن المنظومةَ محـدّدة تمامـاً. لـكن بإجـراء تغيّـرٍ طفيف في تـردد الـمتذبذب يتحـوّل البندول إلـى حركة عشـوائية في جميـع الاتجاهـات ممّـا يُفقِدنـا أيَّ قدرة علـى التنبؤ أو معـرفة مـا حـدث من تغيّـرِ الانتظام إلـى هيولى (Chaos) تـدور بها الكـرة في اتجاهٍ مرة وفي الاتجاه المُضـادّ مـرة أخـرى وبلا ضابـط مـعين. هذا القصـور في التنبؤ لا يُـعزى لقصـورٍ بشـري أو إلـى محدودية النمـوذج الريـاضي التوصيفي ولكنه حقيقة أسـاسية ومتأصـلة وجزء من سيناريو تطور النظـم الديناميكية اللاخـطية كلِّهـا وكأن مستقبلَهـا لم يـكتب بعد

ثالثًـا: التناغـم والتـوافق في حـركة جسـمَين (two-bodies) إزاء الطلاق والانفصال في حركة ثلاثة أجسـام (Three-bodies)

نعـرف أن النجـاح الرائـع لقـوانين نيوتن أتـى بعد أن وصف بالتفصيـل دورانَ كـوكب نمـوذجي مثل الأرض حـول نجم مثل الشـمس ووجد أن المـدار كان إهليجيّاً طالمـا أنهمـا مرتبطـان بقـوة الجـاذبية. إذا أضفنـا جسـمًا آخر لتلـك المنظومة الجاذبية (الشـكل 4)، فإن الدراسـات تبيِّن أن المسـافات بين الأجسـام الثلاثة -وبالأحـرى قوة الجاذبيّة بينها- سـوف تتغير باستمرار



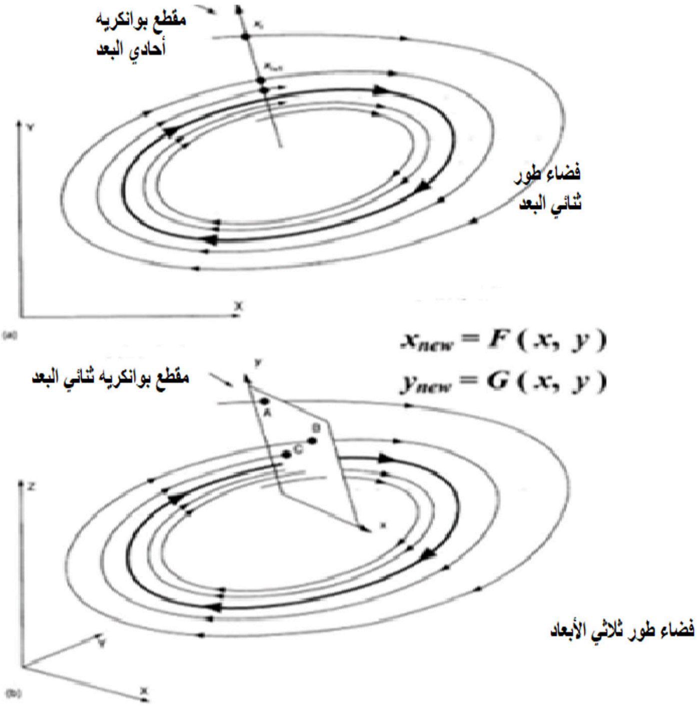
الشكل 4: مسألة التجاذب الثقالي لجسمَين إزاء ثلاثة أجسام.

تقـدّم هذه المنظـومة البسيـطة أولَ دليـل علـى الحركة العشـوائية وغيـر المنتظمة وغير الـمُتنبَّأ بها، وتغـدو مداراتُ الـدوران ككرة خيـوط الصوف، وليست منتظـمةً كالتي حصلنـا عليهـا من نموذج الجسـمَين كمـا مبيّن في الشـكل (5)

الشكل 5: المدار الشوّاش إزاء الإهليجي

حـاول العبقـري الفرنـسي بوانكَريـه (1854-19112) الإجـابة بـدراسة حركة الأجسـام الثلاثة تحت عنـوان فخـمٍ من نمـط "هـل المنظـومة الشـمسيّة مستقـرة؟". بـدأ هذا العبقـري في معـالجة الـسؤال بمقـاربة جديـدة عن طـريق اختراع ما يُسـمّى بفضاء الطـور، وهـو يختـلف كليـا عن الفضاء العـادي حيث نـدرس تغيّر حركة الكـمية الفيزيائية مثـل الموضع q مـع الزمن t. إن فضـاءَ الطـور شيء أخـر حيث يوضِّـح الـعلاقة بين الموضع q والسـرعة q˙ او بالأحرى كمية الحـركة p=mq˙ وبالتالي أصبـحت منظومة الإحداثيات تُمثَّـل بـالزوج (q,p). تمّت مقـاربة بوانكَريه في دراسة استقـرار المنظومة الشـمسية وذلك عبـر تخيُّل صفحة وهـمية متعامـدة علـى مسـارٍ في فضـاء الطور (ما يُدعـى مقطع بوانكَريـه Poincare sections) كما هو موضح بالشـكل (6)

وفي كل مـره يقطع مسـارُ الـكوكب المقطعَ تُسجَّـل نقـطة علـى الأخيـر، ويلاحظ تقـارب النقـاط



الشكل 6: مقطع بوانكَريه في فضاء الطور.

المُسجَّلة ومن ثم تقارب سلسلة الحل الناتجة. وجد بوانكَريه أن الأشكال الناجمة في المقاطِع وبخاصة المناطق التي لم تَظهر بها دوريّةٌ خالصة حيث تكدّست النقاط أعطت إرهاصات عمّا سُمِّي لاحقاً بالجاذب العجيب أو الغريب (Strange attractor). كمن الاستنتاجُ الرئيسُ لدراسة بوانكَريه أن مسار الكواكب لا يمكن التنبؤ به بدقة لأنه غير دوري على المدى الطويل، أي أن المنظومة سوف تعيش في حالة عشوائية شوّاشة إن عاجلاً أم آجلاً ولفترة طويلة من الزمن لا يمكن الهروب منها أو تجنبها في المنظومة الشمسية

رابعاً: الجاذبات في النظم الديناميكية

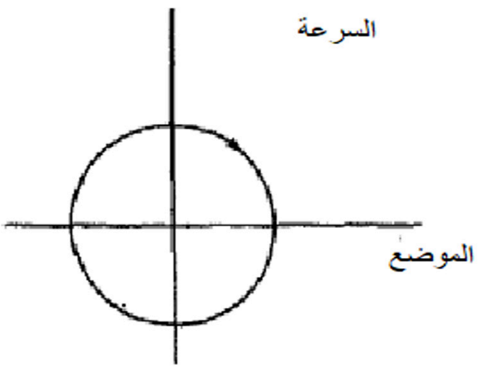
هناك نوعان شائعان لهذه النظم:

1. مُشتِّتة للطاقة أو مخمِّدة (مثال حركة كرة بندول في وسط احتكاكي كالهواء، حيث تتوزع طاقة كرة البندول على جزيئات الهواء من خلال الاحتكاك ومن ثّم لا يمكن استرجاعها) وعند رسم حركتها داخل فضاء الطور فإن سرعتَها تعاني من الانكماش متمثلاً في نقصان سعة حركة البندول.
2. مُحافِظة حيث الطاقة الكلية للمنظومة ثابتة ولذلك تكون مساراتُها في فضاء الطور مغلقةً مثل الدائرة

لنأخذ الآن البندول كحالة دراسة حيث تُوصَّف حركة النقطة المُعلَّقة في طرفه بمعادلة غير خطيّة لـ θزاوية رأسِه: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -I^2 \sin\theta$، وذلك لوجود الحدّ $\sin\theta$. يكمن نمطُ التفكير المُتَّبَع في الفيزياء النظرية في تبسيط المسألة بأن نحوِّلها إلى تقريب خطي شريطة المحافظة تقريباً على السلوك الأساسي للظاهرة المُراد دراستها. يعني ذلك أنه بفرض أن θ صغيرة نحصل على معادلة خطيّة للحركة $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -I^2\theta$، حيث يمكن الحلّ في معظم الحالات بصورة تحليلية(analytical) أو حسابية (computational)

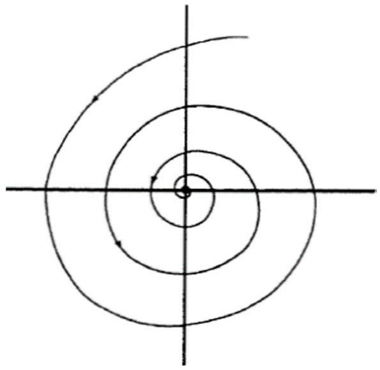
يمكن فهم موضوع الجاذِب من خلال الأمثلة التالية:

أ- البندول المثالي: نفترض هنا أن البندول لا يعاني أيَّ مقاومة ومن ثَم يستمر في الحركة سرمديًّا وتكون الطاقة الكلية مصونة. مسار المنظومة في الفضاء العادي عبارة عن دالة دورية جيبيّة، بينما في فضاء الطور -أي الجاذِب- عبارة عن دائرة مغلقة (الشكل 7). تؤدّي زيادةُ سعة الحركة في الحالة الابتدائية إلى دائرة أكثر اتّساعًا



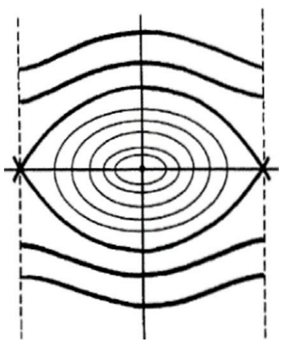
الشكل 7: بندول مثالي

ب- البنــدول الحقيقي: يتعـرض البندول في الحقيقة لقـوى احتـكاك وبالتالي تقل سـعة حركتـه من دورة إلــى أخـرى مما يجعله يستقـرّ حتماً عند نقــطة اتّزانه بصـورة مؤكدة ما لم يتعرض لقـوّة تغذية من الخارج، ولذلك نقـول إن الجاذب هنا نقطة (الشــكل 8)



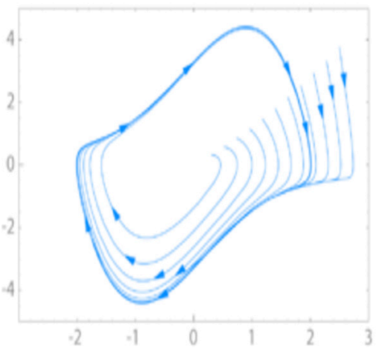
الشكل 8: بندول حقيقي

ج- البنــدول اللاخطي: هنــا لا نستطيع تقريب $\sin\theta$ بــ θ، بل ننظر إلــى معادلة الحركة بصورتهــا الأصلية، لأن ســعة الحــركة كبيــرة لــدرجة أن الكـرة قــد تصل إلــى نقــطة التعــليق وتــدور في حــركة دورانية بدلاً من الحــركة الاهتزازية، ومن ثَــم ينقســم الجــاذبُ إما إلى مســار مغلق إهــليجي يصاحب الحــركةَ الاهتزازية أو مســارٍ مفتــوح يعبِّر عن الحركة الــدورانية مع وجود فواصِــل بينهمــا (Separatrices). والــعجيب في الأمر أن كــرة البنــدول عندمــا تصــل إلــى نقــطة التعليق لا أحــد يستطيــع التنبؤ هــل هي ذاهبة إلــى الحركة الــدورانية أم إلى الاهتزازية (الشــكل 9)



الشكل 9: بندول لا خطّي

د- الجــاذِب مُحــدَّد الــدورة Limit cycle: يَظهــر هذا الجاذِب عنــد دراسة البندول القصـري(self-oscillatory system) ، وهــو النمــوذج الريــاضي المستخــدم في توصيف حــركة القلب البشــري وقــد استنتجها العالِم فــان ديــر بــول، حيث تحتوي معادلتُــه التفاضــليّة من المــرتبة الثــانية: $\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x$ على حــدّ تخميد للطــاقة (يتضمّن لثــابت μ . الجــاذب هنــا مســارٌ مغلق ممثِّل للحــركة الاهتزازية، ومع ذلك فإننا لــو بدأنا الحركة من الشــروط الابتدائية خــارج أو داخل هذا الســريان المغــلق فإن المســارَ ســوف يتقارب له قصرياً كما هو موضح بالشكل (10).



الشكل 9: بندول لا خطّي

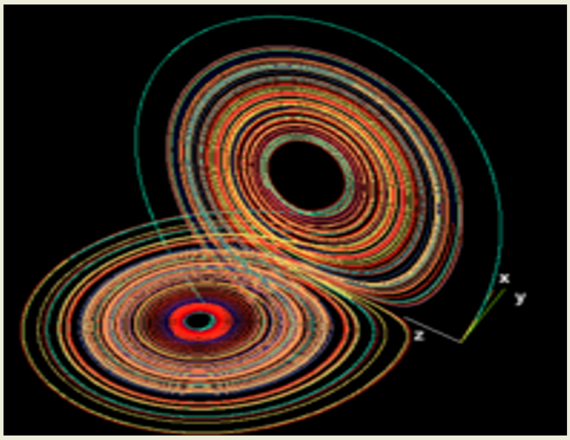
هـ- الجــاذِب العجيب strange attractor: هذا الجاذب هو الــعلامة المــميزة للنظم العشــوائية ولســرياناها الديناميــكي داخــل فضاء الطــور، فلا يمــكن التنبؤ به لأنــه عبــارة عن عــددٍ لا نهــائي من المســارات يتــميز بالخصائص الآتية

- ينتُج عن عدد قليل من المعادلات التفاضلية اللاخطيّة
- ينتــمي إلــى المجموعــات الريــاضية ذات الأبعــاد الكســوريّة fractal dimension

ويعــود سببُ تســميته بالعجيب إلــى مخالفته للحــدس كونه محتــوىً داخــل حيِّز محــدود في فضاء الطور وفي الوقت نفسِــه يعتمد علــى أن أيَّ نقطتين

المنظومة الشوّاشة الأكثر شهرة (لورنز- قدّيس الطقس):

جاذب لورنتزو ذو بُعد كسوريّ بين 2 و3 ويشبه عيني البومة أو جناحَي الفراشة، وهو محتوىً داخل حيّزٍ محدود من فضاء الطور، رغمًا أنه لا يلاقي نفسَه أو يتقاطع، وهو يقدِّم توصيفًا جيّدًا لنظام الطقس ذي التدفّق الحتمي ولكن اللادّوري Deterministic non-periodic flow.



الشكل 11: جاذِب لورنتزو

يكمن جمالُ دراسة التنبؤ بالطقس كمنظومة ديناميكيّة في عدد من الأسباب المنطقية

- يمثِّل تحدّيًا قويًّا لصلاحية القوانين الفيزيقية والعلاقات بين المتغيرات الترموديناميكيّة مثل درجة الحرارة ونسبة الرطوبة وسرعة الرياح وفروق الضغط

- يمثِّل اختيارًا رائعًا لقدرتنا الحسابية في تتبع تطور منظومة ديناميكيّة معقّدة يحكمُها عددٌ من المعادلات التفاضلية اللاخطية المقترنة coupled nonlinear differential equations.

- يقدِّم فوائدَ اقتصاديةً رائعة من خلال تجنب كوارث الأعاصير المميتة وفيضانات الأمطار المُغرِقة والحوادث العرضية الناتجة من التغيرات الفجائية للطقس، مثلاً أثناء عمليات الصيد في البحر

متقاربتين في الشروط الابتدائيّة تُنتِجان نمطَين من الحلول المختلفة اختلافاً كبيرًا. وقد اقترح تسميةَ الجاذبِ العجيب الرياضيّاتيّان رُويل وتاكِنز تحت ما يسمى التنافس بين ظاهرتَي المطّ والطيّ في فضاء الطور بشكلٍ مماثل لكيفيّة صنع حلوى التوفي عبر إجراء كثيرٍ من عمليات المطّ والطيّ بحيث أن أيَّ نقطتين متجاذبتين قد تتقاربان أو تتباعدان لحظياً، ومن أهمّ أمثلتِه جاذِب لورنتزو (الشكل 11)

خامساً: مقارنة النظم الديناميكيّة

يوضح الجدولان التاليان الفروق الجوهرية بين الأنماط الثلاث من النظم الديناميكيّة: المُرتَّب (Order)، الشوّاش (Chaos) والعشوائي(Random) ، بالإضافة إلى الفرق بين النظم الخطية (linear) واللاخطية (Nonlinear)

"الجبال ليست مخروطية الشكل، السُحب ليست اسطوانية الشكل والبرق ليس خطًّا مستقيمًا"

سادساً: الكسوريّات؛ هندسة الكون الحقيقية

نحن نعلم أن النقطة ليس لها أبعاد فهي صفريّة البعد D=0، والخطّ المستقيم له بعد مساوٍ للواحد الصحيح D=1 ، بينما الشكل المستوي له بعدان، والحجم يتمّ توصيفُه باستخدام ثلاث إحداثيات. في الحقيقة كانت هناك إرهاصات مبكِّرة حول أن هناك بعضَ الأشكال الهندسية لها أبعاد كسريّة، ولكن الكسوريّات غدتْ علمًا عندما أصدر بنوا مندلبروت (1924-2010) كتابَه الأول بعنوان الشكل والصدفة والبعد form, chance and dimension وقد أعقبه

المنظومة الفيزيائيّة (System)	**عشوائي أو إحصائي (Randomness)**	**شوّاش (Chaos)**	**نموذج كلاسيكي ذو ترتيب (order)**
مثال نموذجي	رمي النرد	السُّحب –الطقس	الساعات –الكواكب
الحتميّة والتنبُّئِيّة	لا يوجد تنبّؤ سوى كوسطيّ للأعداد الكبيرة	تنبُّؤ محدود لفترة قصيرة	عالية الدقة في التنبؤ
تأثير عدم الدقة في قياس الشروط الابتدائيّة	لا شيء سوى الأخطاء	يتزايد عدمُ اليقين أُسيّاً ويصبح هو المسيطر مع تطور المنظومة	ضعيف ويبقى دائماً متناسباً مع الحلّ
درجات الحرية وأبعاد المنظومة	لا نهائي	قليل	محدود
التحكّم	ضعيف	صعب ومخادع	سهل ومتاح
جاذب	لا يوجد	عجيب وذو بعد كسوري	مسار مُغلق (مثل دائرة)

لا خطي Nonlinear	**خطي Linear**
قانون بسيط يؤدي لسلوك معقد، اختلاف بسيط قي قيم البارامترات يؤدي لتأثيرات ضخمة.	قواعد بسيطة تؤدي لسلوك سهل الصياغة والفهم، المدخلات تتناسب مع المخرجات تناسباً خطيًا
يقينية محدودة وسلوك شاذ يحمل الكثير من المفاجئات مثل التنظيم الذاتي–self organizations أو التآزري cooperative	يقينية تامة ولا توجد مفاجآت أثناء تطور المنظومة مع الزمن
الكلُّ لا يساوي مجموعَ الأجزاء	مجموع تأثيرات الأجزاء يعطي تأثيرَ الكلَّ
مثال: معادلة KdV–Burger $\frac{d\theta}{dt}+\theta\frac{d\theta}{dx}+\frac{d^3\theta}{dx^3}=\frac{d^2\theta}{dx^2}$ يُضفي الحدّ اللاخطي $\theta\frac{d\theta}{dx}$ خواصّ خلابة للمعادلة لدرجة أنها قد تُنتج موجاتٍ شبيهةً بخواص	مثال: $\frac{d^2\theta}{dt^2}=-I^2\theta$ الحل دالة دورية جيبيّة أو تراكُب Superposition دوالّ جيبيّة، يتغير الحلّ بانتظام طوال تطور المنظومة

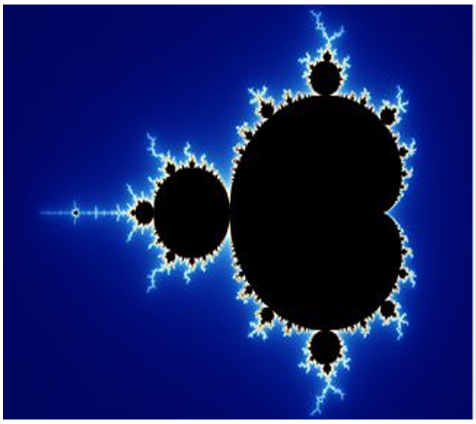
بكتــاب أكثــر عمــومية بعنــوان fractal geometry of nature، وقــد حــوى معظــم أفــكاره والتي دائماً ما يذكرهــا مثل أن "السُحــب ليست اســطوانية الشــكل ولا الجبــال مخــروطية الطبيعة حتى البــرق ليس خطًّا مستقيمًا". إن الطبيــعة تــحبّ وتــرغب في الهندسة الكســورية كما يبيّن الشــكل (12)

إذن من الســهل القول إن الهندسة الرســميّة للكــون هي الكســوريّة الملائــمة لتركيبتهــا الغنية والمــليئة بالتفاصيــل الــدقيقة والتجــاويف الكثيــرة والتماثــل الذاتي. من الجميــل أن نعــرف أن الــرئةَ ذاتُ تــركيب تفرّعي من أجــل أن تعطيَ مســاحةً ســطحية كبيــرة مقــارنة بالحجــم الذي يحويهــا، ممّــا يلائم كفــاءةً عظمــى أثناء عمــلية تبادل الغــازات في عمــليتي الشــهيق والزفيــر

يشيــر مصطلــح "كســور" إلــى شــكلٍ مُكــوَّن من أجزاء مشــابهة للــكلّ، مــا يعــرض التناظــرَ عبــر المقاييــس. في حين تفشــل الهنــدسة الإقليــدية في وصف العديــد من الهيــاكل في الطبيعة والفيزياء، توفِّر الهندسة الكسورية إطــارًا لقيــاس تعقيدهــا الفطري. هذا يدلنــا علــى الحكــمة وراء ســر تفرعات الأشجــار وتجمّعات المجرات واضطرابــات الموائع بــسبب التماثل التآلفي الذاتي (self- affine) أو التماثــل الذاتي الصحيح(exact-self similar) في أنماطهــا. فقــط من خلال استخــدام المخططــات التكــرارية للمعــادلات الديناميــكية غيــر الخــطية، يمــكن توليد مجمــوعتَي ماندلبــروت وجوليا الــلتَين تحاكيان الأشــكال الطبيعية الخــرافية كما هو موضــح في الشــكل (13)

الجدير بالملاحظة أن المعادلةَ المنتجة للشــكل

الشكل 12: أمثلة عن ظواهر طبيعيّة تتجلّى فيها الكسوريّات.



الشكل 13: أشكال شبيهة بمجموعتَي ماندِلبروت وجوليا.

الرائع غاية في البساطة تُعرَّف بشكلٍ تكراري في المستوي العقدي على النحو $Z_{i+1} = Z_i^2 + C$، حيث C عددٌ عقديّ ثابت (متغيِّر) في مجموعة جوليا (ماندِلبروت)

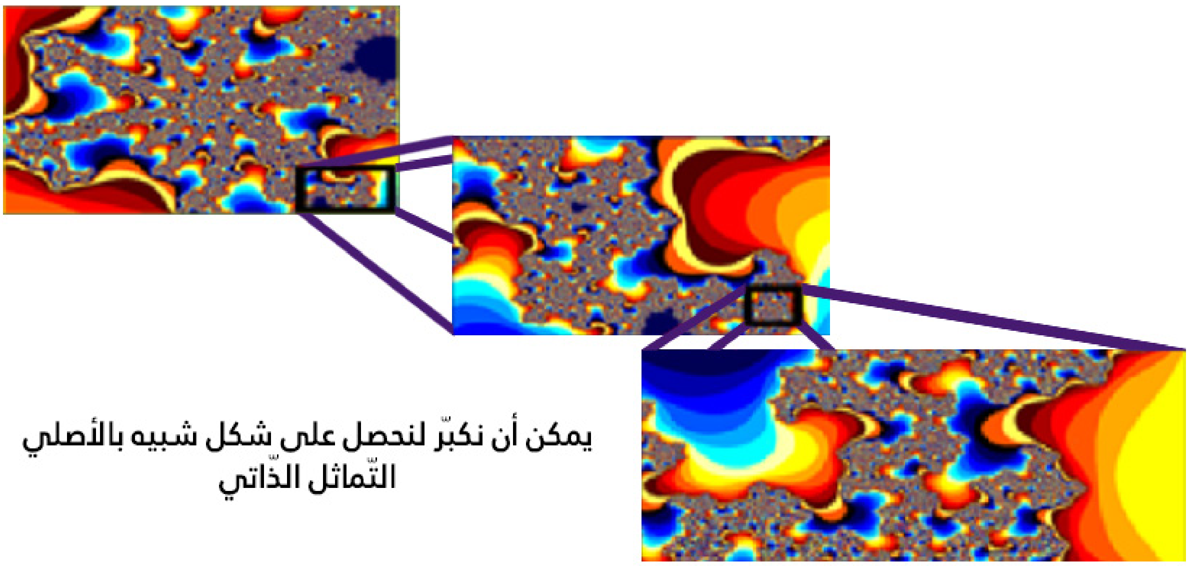
من الجميل لنا أن نتعرف أيضاً على ما يسمى التماثل الذاتي -أو ما يُعرَف أيضًا بالصمود إزاء تغيير المقاس- الضروري لتوليد الكسوريّات من حيث أنها تتولّد عبر تكرارِ عمليّة تقسيمٍ متتالٍ، وكل تقسيم ينجم عنه شكل شبيه بالأصلي (الشكل 14)

سابعاً: أنواع الكسوريّات:

تنقسم الكسوريّات إلى كسوريّات رياضية وكسوريّات طبيعية أو ذات تركيب يتضمّن عنصرَ العشوائية، حيث لا تكون الأخيرةُ تامّةَ الانتظام، كأن تكون تآلفيّةً ذاتيّاً self-affine(أي تحقِّق الصمودَ عبر تغيير المقاس بنسبٍ غير منتظمة في المناحي) أو تكون متماثلةً ذاتيّاً إحصائيّاً statistical self-similar (أي تحقّق الصمود عبر تغيير المقاس بالنسبة لخصائص إحصائيّة إجماليّة)، مع ملاحظة أن الطبيعة لابد أن تعطي كامل الحظوظ للصدفة والعشوائية البنّاءة والخلاقة

الكسوريات الرياضية الأحاديّة mono-fractals:

يمكن إنشاؤها بواسطة علاقات رياضية صارمة



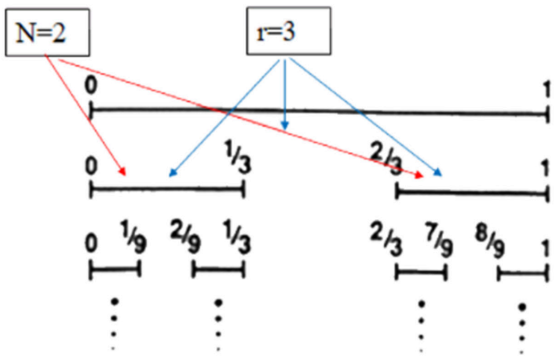
الشكل 14: التماثل الذاتي.

وتكـرارية يتـمّ وصفهـا بمتغيـر واحد، ألا وهـو البعد الكسـوريّ fractal dimension، ونـورد فيمـا يـلي بعضًـا من أمثلتهـا.

أ- مجمـوعة كانتور أو غبار كانتـور Cantor Set: نبدأ بقطـعة مستقيـمة وليكن طولها الواحد تُقسَّـم إلى ثلاثة أجزاء متسـاوية، ثـم يُنزَع الجزء الأوسـط لنحصل علـى جزأين متسـاويين. نكـرِّر العمـليةَ علـى الأجزاء الـمتبقية عـددًا كبيـرًا من المـرات حتـى نحصل على مجمـوعة نمـطية -تمثِّل التقاطـع اللانهـائي للأجزاء التي نحصـل عليهـا في كلّ مـرة- ينعـدم قياسُـها وفق لـوبيغ، وكذلـك بعدُهـا الطوبولـوجي بخلاف بُعدِ هاوسـدورف الكسـوريّ -والذي يقيس "خشـونة" المجمـوعة قيد الـدراسة- الخـاصّ بهـا والمُعطى بـ

$$D_f = \frac{log(N)}{\log(r)}$$

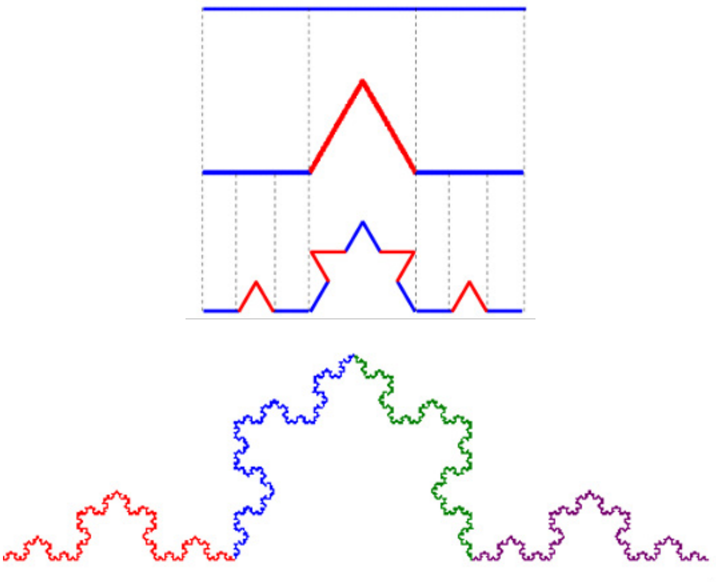
حيث N هي عدد الأجزاء بعد عمليه حذف الجزء الوسط و r نـسبة التقسيـم لنصـل إلـى قيمة بُعدٍ كسـوريّ مسـاوية تقريبًا لـ 0.6309 (الشكل 15)



الشكل 15: بُعد مجموعة كانتور.

لقـد حصلنا علـى مجمـوعة ريـاضية تحوي عـددًا غيرَ مـعدود من النقـاط، وليـست خطاً مستقيمـاً ولا نقطةً أيضـاً ولكنها مجمـوعة هندسية ذات أبعاد كسـوريّة. يوضّـح لنا المثالُ مـدى سـهولة اختزال البُعد الخطي إلى بُعد كسـوريّ

ب- منحني كوخ Koch Curve: ومرة أخرى نُعيد عملية إنشـاء مجموعة كانتور، ولكن باستبدال مقطعَين بالجزء الأوسـط كما في الشـكل (16) فنحصل على مجموعة كسـورية بين الخـط المستقيـم والمستـوي بُعدُهـا الكسوريّ مساوٍ لـ $D_f = \frac{logN}{log\sigma} = \frac{ln4}{ln3} = 1.2618$.



الشكل 16: منحني كوخ.

تُعـطي قيـمة البُعد الأكبـر من الواحد الصحيح بالقيـمة 0.2618 إشـارةً على درجةٍ معتدلة لتهشّـم المستقيـم ذي البعـد المسـاوي للواحـد. لـكَ أن تعـرف أن شبـكية الـعين لهـا بُعـد كسـوريّ يسـاوي تقريبًـا 1.723 وبالتـالي شكلُها الكسـوري أقرب إلى المستـوي منـه إلـى الخـط المستقيـم

$$D = \frac{\log(N)}{\log(r)}$$

$$D = \frac{\log(N)}{\log(r)} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309$$

ج- مثلث سيربنسكي Sierpinski triangle: كما يبيِّن الشـكل (17)، نبتدئ هنا بمثلث متسـاوي الأضلاع حيث نقسـم أضلاعه إلـى جزأين متسـاويَين ونوصل النقاطَ لنصـل إلى المثـلث المتوسـط الأبيض، وبحذفه نحصل على مثـلث منقوص الربع الأوسـط، ونستمرّ في هذه

الإجرائيّة الرياضيّة مرات عديدة لنحصل على منظومة كسوريّة بِبُعد كسوريّ مساوٍ لـ $D_f = \frac{logM}{logr} = \frac{ln3}{ln2} = 1.585$

الشكل 17: مثلث سيربنسكي.

ثامناً: مقارنة بين الكسوريّات الرياضيّة والطبيعيّة

هناك من الأشكال الكسوريّة ما يخلب الألباب بسبب غناها اللامتناهي. يوضِّح الجدول التالي الفرق بين الكسوريّات الطبيعية والرياضية

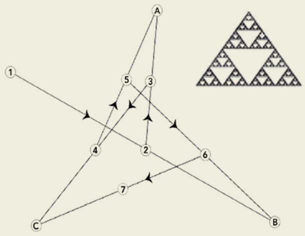
الكسوريّات الطبيعية	الكسوريّات الرياضية
هي من نتاج الطبيعة ولذلك من الضروري وجود عنصر عشوائي أو احتماليّ أثناء عمليات تكوينها	تولد من خلال خوارزميات صارمة، والشكل الناتج يكون متماثلًا إلى أدق تفاصيله
التماثل بصورة إحصائية حيث هناك تشابهٌ بصورة تقريبية بين الجزء الصغير عند تكبيره والشكل الأم	ذات تماثل ذاتي حيث الجزء الصغير عند تكبيره يحمل كلّ تفاصيل الشكل الأصلي
لابد من توصيفها بعدد كبير من المتغيرات مثل البُعد الكسوريّ D_f، والإنتروبي D_I، والترابطي D_C.	يمكن التوصيف بعدد واحد وهو بعد التماثل الذاتي $D_f = \frac{logN}{logr}$
شبكية العين – الرئة	مجموعة جوليا

تاسعاً: ميزات الكسوريّات وتطبيقاتُها

تُقاس الكسوريّات بِبُعدها الكسوريّ الذي يعبِّر عن كيفية ملء كائنٍ للوسط المحيط به مقارنةً بالهندسة الصحيحة العادية. معظم الكسوريّات الطبيعية تتراوح أبعادها بين 1.5-2.5، وتشمل المؤشراتِ ذاتَ الصلة التجويفية التي تقيس أحجام الفجوات ودرجات الالتصاق والخشونة والتعرجات. تُولِّد النظمُ الحقيقيّة كسوريّاتٍ عبر التغيّرات الفيزيائية ذاتية التنظيم أو قواعد النمو أو عمليات التطور بدلاً من مجرّد العلاقات الرياضية التكرارية البسيطة. تتطلّب نمذجةُ الكسوريّات الطبيعيّة التركيزَ على الديناميكيات التي

تجربة ذهنية جميلة: هل التداخل الضوئي عبارة عن لعبة شواشيّة كونية؟!

لبيان وجه النظر المراد إيصالها والتي قد يكون لها مردود فلسفي عميق، تخيّل أنه لدينا مثلث متساوي الأضلاع رؤوسه A, B, C، وأن هناك نردًا أوجهه عبارة عن الثلاثة حروف السابقة كما موضح بالشكل (18)

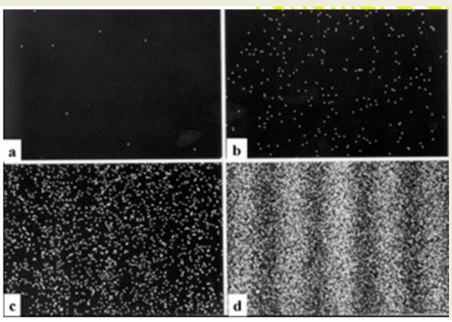


الشكل 18: لعبة الشوّاش

نبدأ التجربة من النقطة (1) حيث نرمي النرد لنحصل مثلاً على B، فنقف في منتصف المسافة بين (1) و الرأس B، ولتكن النقطة (2). ثمّ نكرّر رمي النرد لنحصل مثلًا على A، فتكون النقطةُ (3) منتصفُ القطعة (2)-A بدايةَ المحاولة التالية، وهكذا نكرّر العمليّة آلاف المرات لنحصل على شكل سيربنسكي الكسوري بكل تفاصيله من التماثل الذاتي الصارم، طارحًا الأسئلة الآتية عن سبب

- انتظام الشكل الناجم على الرغم من وجود عنصر الصدفة الناتج عن وجود النرد
- هناك نقاط متاحة للتكدّس والتجمع، وهناك نقط خالية ممنوعة على لعبه النرد
- بقطع النظر عن أيّ نقطة خارج المثلّث نبدأ منها، فإننا سوف ننتهي داخله

ولكن السؤال الأهم يبقى: أليس هناك تشابه كبير بين التجربة السابقة وتجربة التداخل الضوئي للفوتونات المنفردة من حيث التداخل البنّاء والتكدس في مناطق واستحالة التواجد في مناطق التداخل الهدّام؟ (الشكل 19)



الشكل 19: التداخل البنّاءوالهدّام للفوتونات

تؤدي إلى التعقيد من خلال التدرج. هناك العديد من التطبيقات التي تستفيد من مفاهيم الديناميكا اللاخطية والتحليل الكسوري في مجموعة متنوعة من المجالات من مثل

- محاكاة أحوال الطقس والمناخ والهيدرولوجيا والزلازل
- نمذجة أنماط النمو في علم الأحياء وعلم التشكّل.
- تحليل التقلبات والتدرج في التمويل، وتصميم أدوات التداول في الأسواق التجارية
- تفسير الفوضى في النيوترونات والشبكات العصبونيّة
- تطوير مخططات التشفير باستخدام خرائط فوضوية ذات تعقيد عالٍ
- تحسين شبكات اللاسلكي مع مراعاة تجانس التغطية
- بناء هوائيات كسوريّة لأجهزة الاتصال متعددة النطاق
- تصنيف الإشارات والصور والبيانات باستخدام الأبعاد الكسوريّة
- محاكاة الرسوميّات الحاسوبيّة للواقِع المتضمّن مثلًا لمناظر طبيعية
- إنشاء فنٍّ وعمارةٍ كُسوريَّين ذوَي خصائص جمالية مُرضِية

عاشراً: أسئلة مفتوحة أمام الأجندة البحثية للعلوم Open problems

1. هل هناك دور للبنية الهندسية الكسوريّة من أجل فهم عمل الدماغ ومن ثم طبيعة الوعي الإنساني وخصوصاً أن البنية الدماغية لها خصائص كسوريّة واضحة؟
2. يثار كثيرٌ من الجدل حول الطبيعة الكسورية لنسيج الزمكان عند أبعاد بلانك، وخصوصاً أن الهياج الكمومي يلعب دوراً مهماً في مصير كثير من العمليات الفيزيائية. يبدو نسيج الزمكان مثل محيطٍ سلسٍ ومستوٍ عند النظر من الطائرة، ولكن في الحقيقة قد يعجّ المُحيط المستوي بالأعاصير والموجات العملاقة
3. هل هناك دور يمكن أن تلعبه الهندسة الكسوريّة في المصالحة بين ميكانيكا الكم والنسبية العامة لإنتاج نظرية مقبولة عن الجاذبية الكموميّة؟
4. الأشكال المعقّدة فيها كثير من التعرجات والخشونة والانكسارات، ما يجعل صعبًا استخدامَ المعادلات التفاضلية العادية، ولكن الكسوريات غير تفاضليّة بشكل رئيس، فهل هناك فرصة لما يُسمّى بالحسابات التفاضليّة الكسورية مثل $\frac{d^{1/2}x}{dt^{1/2}}$؟

المراجِع:

1. Chaos: Making a New Science, James Gleick, Penguin Books; First Edition (2008).
2. Chaos in the cosmos, the stunning complexity of the universe, B. Parker, Plenum Press (1996).
3. Chaos, I. A. Smith, oxford University press (2007).
4. Does God play dice? The Mathematics of Chaos, I. Stewart, Basil Blackwell Inc. (1990).

خبر

تشير النتائج الجديدة إلى أن آخر اصطدام كبير لمجرتنا حدث بعد مليارات السنين مما كان يُعتقد سابقًا. أصبح الاكتشاف ممكنًا بفضل مركبة غايا التابعة لوكالة الفضاء الأوروبية، التي تقوم برسم خريطة لأكثر من مليار نجم في مجرة درب التبانة وما وراءها، متتبعةً حركات هذه النجوم وسطوعها وحرارتها وتركيبها.

المصدر: ScienceDaily