

# مسألة للطلاب

نهدف في هذه الزاوية إلى تدريب طلابنا على حلّ بعض المسائل التي تتطلب بعض التفكير. نختار عادةً مثل هذه المسائل من الأسئلة التي تُلقى في المسابقات (ومنها مسابقات الأولمبيادات الدولية). في كلّ عدد، سوف نعرض حلًّا لمسألة عُرضت في العدد السابق ونقدّم مسألة جديدة

## مسألة غير محلولة (فيزياء، سنة ثانية)

يوجد غاز إلكتروني ذو كثافة منخفضة ضمن منطقة يخيم فيها حقل مغناطيسي في الاتجاه  $z$  شدته تحقق

$$B \gg \frac{mk_B T}{\hbar e}$$

حيث  $T$  درجة الحرارة؛  $m$  و  $e$  كتلة وشحنة الإلكترون على الترتيب. تحصر الجدران التي تُعدّ حواجز كمونية عالية الغاز ضمن المنطقة

$$0 < z < L,$$

ونرمز بـ  $p_0$  لضغط الإلكترونات الأولى على هذه الجدران.

تُرد موجة صدمٍ بشكلٍ حاجزٍ كموني ارتفاعه  $U_0 = 100$   $k_B T$  وتنتشر بسرعة  $u$  ضمن هذه المنطقة، ما يعني أنه بينما تكون الطاقة الكامنة للإلكترونات معدومةً من أجل  $z > ut$ ، فإن هذه الطاقة تغدو  $U_0$  من أجل  $z < ut$ .

أوجد الضغط المُطبّق على الجدران عندما تقطع الموجة المسافة  $L$  بين الجدران. افترض أن

$$u \ll \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

وأهمل الكمون الكهرساكن للتأثير بين الإلكترونات، كما افترض الغاز غير منحلّ وبالتالي يمكن استخدام توزيع ماكسويل.

## مسألة العدد الماضي

### (فيزياء، بعد إتمام مقرّر أولي في علم الكون)

تُطلق رصاصةً ضمن كون روبرتسون-ووكر المتمدّد،

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

سرعتها  $V_1$  (بالنسبة لراصدٍ كوني ثابت في الإحداثيات المتحركة ضمن تمدد الكون comoving). بعد برهة تمدد خلالها الكون بمقدار عاملٍ مقاسٍ  $(1+z)^{-1}$  (scale factor)، غدت سرعة الطلقة بالنسبة للراصد الكوني الموضعي في موضع الرصاصة الجديد مساويةً لـ  $V_2$ . نعتبر  $c=1$ . برهن العلاقة

$$\frac{\gamma_2 V_2}{\gamma_1 V_1} = \frac{1}{1+z} : \gamma(V) = (1-V^2)^{-\frac{1}{2}}$$

واستنتج عبارة الانزياح نحو الأحمر الموافقة للفوتونات

### الحل

بتطبيق قانون هبل ( $\delta V = Hdr$ ) وتركيب السرعات الموازية لمحور واحد في النسبية الخاصة

$$(u \circ v = \frac{u+v}{1+uv})$$

تغدو السرعة الصرفة للرصاصة التي تمرّ بسرعة  $V$  في مرجعٍ موضعيٍ موافقٍ لراصدٍ كونيٍ مساويةً في مرجعٍ موضعيٍ موافقٍ لراصدٍ كونيٍ آخر

بعد اجتيازها مسافة صفة  $dr$  |

$$V - (1 - V^2) V dR/R$$

مع إهمال الحدود من الرتبة الثانية وأعلى للمقدار  $dr$  لأنه لدينا:

$$\delta V = H dr = HV dt = \frac{\dot{R}}{R} V dt = V \frac{dR}{R}$$

$$V' = \frac{V - \delta V}{1 - V \delta V} = V - (1 - V^2) \delta V + O(\delta V)^2$$

$$= V - (1 - V^2) V \frac{dR}{R} + O(\delta V)^2$$

$$\text{نستنتج } \frac{\gamma_2 V_2}{\gamma_1 V_1} = \frac{1}{1+z} : \gamma(V) = (1 - V^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dV}{dR} = -(1 - V^2) \frac{V}{R} \Rightarrow \frac{dV}{V(V^2 - 1)} = \frac{dR}{R} = dV \left( \frac{-1}{V} + \frac{1/2}{V+1} + \frac{1/2}{V-1} \right)$$

$$\Rightarrow \ln R = -\ln V + \frac{1}{2} (\ln(1+V) + \ln(1-V)) + C = \ln \frac{\sqrt{1-V^2}}{V} + C$$

$$\Rightarrow \gamma V = \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{c}{R} = c(1+z) \Rightarrow \frac{\gamma_2 V_2}{\gamma_1 V_1} = \frac{1+z_2}{1+z_1} \stackrel{z_1=z}{z_2=0 (R_2=1)} = \frac{1}{1+z}$$

إذن من أجل جسيم بكتلة غير معدومة فإن الاندفاع النسبوي ينزاح نحو الأحمر بمقدار  $(1+z)$  مع تمدد الكون.

من أجل الفوتونات:

$$V \rightarrow 1 \Rightarrow E = P = h\nu$$

$$P = m\gamma V \Rightarrow \frac{\gamma_2 V_2}{\gamma_1 V_1} = \frac{P_2 \text{ photon}}{P_1} = \frac{h\nu_2}{h\nu_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1}{1+z}$$