موضوعات إثرائية

معادلة بولتزمان

تعـد معـادلة بولتزمـان Boltzmann equation من المعـادلات الأسـاسية في الميكانيـكا الإحصـائية وتعـد حجـر الأسـاس في فهـم الديناميكا الحـرارية (الترموديناميك) thermodynamics والنظرية الحركية kinetic theory التي تُعـدّ جسـرًا يصـل بين الفيزيـاء الصغـريّة والفيزيـاء الكبريّة

تـصف المعادلةُ حـركةَ أعداد كبيـرة من الجسيمات بالمعنـى الإحصـائي، فتسـمح باستنتـاج منـهجي لعمليـات النقـل العيانية مثـل الانتشار وتـدفق الحرارة والتوصيـل (الناقـليّة) انطلاقًا من القـوانين المجهرية الصغـريّة الأسـاسية للطبيـعة. علـى الرغـم من أنها تـنـطبق فقــط علـى النظـم الـمخفّفة غير الـكثيفة، إلا أنهـا تشـكل أساسًـا لنظريـات ذات أهـمية عملية وتقـانية هائـلة، مثـل ديناميكيات السـوائل والهواء والبلازمـا. تشـكل هذه المعـادلة الأسـاسَ الـمتين لـوصف النظـم التي ليـست في حالة تـوازن، وخاصة لتحليـل العمليـات التي تؤدي إلـى التوازن

لـوصف سـلوك النظـم العيـانية مثـل الغـازات أو السـوائل، لا يحتـاج المـرء إلـى معـرفة الخصائص التفصيـلية لجميـع الجسيمـات الفـردية التي تشـكل الغـاز أو السـائل. لحـسن الـحظ، لأن هذا من شأنه أن يتضـمن حلّ جملة مُكـوَّنة من 1023 معادلة مقترنة أو أكثـر. يكفي معرفة الخصائص المتوسـطة للجسيمات، وهنـا يأتي دور الاعتبـارات الإحصـائية

تـصف المعـادلة التوزيـعَ الإحصـائي للجسيمـات في الغاز باستخــدام دالّة التوزيع Distribution function $f(r,v,t)$، وذلـك لأن تـوزع الجسيمـات يتغيـر بمـرور الـوقت بسبب الاصطدامـات بين الجسيمـات التي تؤثر علـى سـرعة الجسيمـات وموضعهـا وتُقـرِّب النظـام من التـوازن الديناميـكي الحـراري (توزيع ماكسـويل-بولتزمان)

تمثِّـل دالة التوزيـع f احتمالية العثـور على جسيم في موضـع معين r ، بسـرعة v في وقت t.

الشكل العام لمعادلة بولتزمان:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\nabla_{\boldsymbol{r}} f + \boldsymbol{a}.\nabla_{\boldsymbol{v}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$$

$\frac{\partial f}{\partial t}$ يمثل هذا الحد التطورَ الزمني لدالة التوزيع.

$\boldsymbol{v}.\nabla_{\boldsymbol{r}} f$ يشيـر هذا الحـد إلـى أن توزيـع الجسيمات سيتغيـر أثنـاء تحركهـا عبر الفضاء بسـرعة v.

$\boldsymbol{a}.\nabla_{\boldsymbol{v}} f$ وهو الحد المسؤول عن التغير في سـرعة الجسيمات بسبب القوى الخـارجية التي تؤدي إلـى تسـارع الجسيمـات حيث a التسـارع النـاتج عن القوة الخـارجية المطبقة (مثل الحقـول الكهربائية أو الجاذبية)

$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$ حد التصـادم وهو الحد الأكثـر تعقيدا فهـو يـصف كيف تتغيـر سـرعات الجسيمـات عندمـا تصطـدم ببعضهـا البعض.

لاحِظ أن الحـدّ الأيسـر من المعـادلة يعبِّـر عن

الاشتقاق الـكلّي أو الجسيمي لـدالّة التوزيع بالنسبة لـلزمن، وبالتـالي فـهي تـصف التطـوّر الزمني لدالّة التوزيع.

بيّن ماكسـويل أنـه من أجـل منظـومة متـوازنة ومتجانـسة، فإنـه في غياب قوى خـارجيّة، تكون دالّةُ التوزيـع معتمدةً على السـرعة فقط وبشـكل غوصيّ متمـركِزًا حـول وسـطِها ومقترِبًا من الصفـر بعيدًا عن وسـطي السرعة.

معادلة بولتزمان في البلازما:

في نظـمٍ مثل البلازما التي تعد غـازات متأينة ، تكون معـادلة بولتزمان أداة ضرورية لفهم سـلوك جسيمات البلازمـا المشـحونة (الإلكترونـات والأيونـات) ذات الشـحنة q والكتـلة m والتي تهيـمن عليهـا القـوى الكهرومغناطيـسية طويـلة المـدى والتي تظهـر في حـد تغيـر السـرعة – التسـارع – النـاتج عن القوة الكهرومغناطيـسية أي قـوة لـورنتز (بـسبب وجـود الحقـل الكهربـائي E الذي يعمـل على تغيير سـرعة الجسيمـات والحقـل المغناطيـسي B الذي يؤدي إلى انحراف الجسيمات المشـحونة ممـا يتسبب في اتباعها

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\nabla_r f + \frac{q}{m}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}).\nabla_v f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$$

مسـارات حلزونية

علمـا أن حد التصادمات يكون أكثـر تعقيدا في البلازما بسبب تفـاعلات كولون طويلة المدى

تستخـدم معـادلة بولتزمـان في دراسة ظواهـر مثـل التوصيل أو الناقـليّة conductivity والانتشار diffusion وانتشـار الموجـات wave propagation في البلازما

لا يمـكن التوصـل إلى حلول دقيقة لمعـادلة بولتزمان بـسبب تعقيدهـا و بالتـالي يتـم اللجـوء إمّـا إلـى التقريبـات من أجـل الحلـول التحليـلية أو إلـى الحلول العددية.

بالنـسبة للبلازمـا، غالبًـا مـا يتـم إجـراء تبسيطـات مثـل معـادلة بولتزمان الخـالية من التصـادم (معادلة فلاسـوف Vlasov)، حيث يتـم إهمـال حـد التصادمات الذي يعـد الأكثر تعقيدا في بلازمـا مفاعلات الاندماج أو البلازمـا الفضـائية بـسبب درجـات الحـرارة العـالية

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\nabla_r f + \frac{q}{m}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}).\nabla_v f = 0$$

عندمـا تكـون التصادمـات نادرة

تعتبر معادلة فلاسوف أساسية في دراسة ديناميكيات البلازمـا الخـالية من التصـادم، مثـل تفـاعلات الموجة والجسيمـات wave-particle interactions ، وتذبذبات البلازما plasma oscillations.

معادلات نافييه-ستوكس

تُستخـدم الديناميكا المـائية (الهيدروديناميكا) لوصف تدفق الأوسـاط المستمـرة مثل الغـازات والعديد من أنـواع السـوائل والبلازمـا. وتُستخـدم في النـمذجة الحاسـوبية لتحـسين تصميـم السـفن والطائـرات والسيـارات الريـاضية من حيث الاستقـرار والمقـاومة. وتُستخـدم المعـادلات أيضًـا لـلتنبؤ بالطقـس، بمـا في ذلـك المحـاكاة الحاسـوبية للأعاصيـر والعواصف والتسـونامي

المعـادلات الثلاث للهيدروديناميـكا هي في الأسـاس قـوانينُ مصـونيّةٍ، ويمكنهـا وصف مجموعة واسـعة من ظواهـر النقـل لأنهـا تحتـوي علـى عدد لا بأس بـه من البارامتـرات. وقـد تـم الحصـول علـى هذه المعـادلات في الأصل من خلال دراسة السـوائل، ولـكن يمـكن الحصول عليها أيضًـا انطلاقًا من معادلة بولتزمان من خلال تحليل متوسـطات المقادير المصونة

أثناء تصادمات جسيمين، ألا وهي: الكتلة والزخم والطاقة

إن المسألة الصعبة جدًا التي لا تزال تواجه المجتمع الرياضي والفيزيائي في هذا المجال هي فهمُ ظاهرة الاضطراب الدوّامي turbulence بالتفصيل انطلاقًا من المبادئ الأوليّة النظريّة، وبنائها كحلّ لمعادلات نافييه-ستوكس. علاوةً على ذلك، هذه المعادلات ذات أهمية كبيرة أيضًا من الناحية الرياضية البحتة، إذ على الرغم من استخدامها الواسع، إلا أنه لم يُثبَت بعد ما إذا كانت الحلول الملساء موجودة دائمًا في منطقةٍ بثلاثة أبعاد -أي ما إذا كانت قابلة للاشتقاق بلا حدود عند جميع نقاط المنطقة- فيما يُسمّى بمسألة الوجود والأملسيّة لنافييه-ستوكس. وقد اعتبر معهد كلاي للرياضيات هذه المسألةَ واحدةً من أكثر المسائل المفتوحة أهميّة، وعرض جائزة قدرها مليون دولار أمريكي لحلّها أو لإيجاد مثال معاكس

تيتّم كلود لويس نافييه (فرنسا، 1785-1836) صغيرًا عندما كان في الثامنة من عمره، وتُرك في رعاية عمّه المهندس المدني الذي حاول تحفيز اهتمامه بالهندسة. درس في مدرسة البوليتكنيك، ثمّ التحق بمدرسة الجسور والمعابِر وغدا بعد تخرّجه بانيَ جسورٍ مشهورًا. لقد توصل إلى المعادلات المعروفة باسمه من خلال حجج خاطئة في عام 1822، وأضحى في عام 1831 أستاذًا في مدرسة البوليتكنيك.

أمّا جورج جابرييل ستوكس (1819-1903) فقد كان ابن رئيس كليّة سليجو في أيرلندا، ودرس في كامبريدج ضمن مجموعة شملت نظريّين مشهورين أمثال اللورد كيلفن، واللورد رايلي. شغل ستوكس الكرسي اللوقي -وهو أكثر مناصب الرياضيات هيبةً في العالَم- وترأّس الجمعية الملكية لمدة لا تقل عن 30 عامًا!. وتعلّقت أهم أعماله بالهيدروديناميكا

تستند معادلات نافيه-ستوكس إلى مصونيّة ثلاث كميّات أساسية في تفاعلات الجسيمات الأساسية: الكتلة والزخم والطاقة، حيث ترتبط بها ثلاثة حقول: كثافة الكتلة $\rho(r,t$، وحقل السرعة $u(r,t$ والكثافة الطاقيّة (طاقة واحدة الكتلة) $\varepsilon(r,t$، حيث تتطلب المعادلات معرفةَ معادلتَي الحالة للوسط المدروس واحدة تربط الضغط بالكثافة ودرجة الحرارة:

$$P = P(\rho,T),$$

وثانية تربط الكثافة الطاقيّة بالكثافة ودرجة الحرارة:

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho,T)$$

بالنسبة للنظم الغازية خفيفة التركيز، يجري تعريف هذه الحقول على أنها متوسِّطات على السرعات باستخدام دالة توزيع بولتزمان، كما في التعابير التالية حيث تعتمد الحقول الناجمة على r و t فقط (ترمز n إلى عدد الجسيمات في واحدة الحجم، وكتلة كلّ منها m):

$$\rho(\mathbf{r},t) = m\int f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v} = mn(\mathbf{r},t)$$
$$\rho(\mathbf{r},t)\,\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = m\int \mathbf{v} f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v}$$
$$\rho(\mathbf{r},t)\,\epsilon(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2} m\int |\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2 f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v}$$

يمكن للمرء بعد ذلك استخدام معادلة بولتزمان عن التطوّر الزمني لدالّة التوزيع f من أجل استنتاج

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{1}{\rho}\nabla\left(P - \frac{\eta}{3}\nabla\cdot\mathbf{u}\right) + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\mathbf{u}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right)\epsilon = -\frac{P}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{u} + \frac{K}{\rho}\nabla^2 T$$

معــادلات نافييه-ستوكس

إنهــا مجمــوعة عــامة جــدًا من المعــادلات، ومن حيث المبــدأ تــصف أيضًــا الديناميــكا الهــوائية، على الرغــم من أن البارامتــرات ستكــون مختــلفة جــدًا. في هذه المعــادلات، تمّ إجراء عــدد من التقريبات من خلال إدخــال العديــد من البارامتــرات الظواهــريّة المــميّزة للســائل، مثــل موتّــر الضغــط P، ومعامِل الــلزوجة η، ومعامِــل التوصيــل الحراري K (تــمّ إسقاط حــدٍّ يعتمد علــى اللزوجة في المعادلة الثــالثة من أجل التبسيط)

لاحظ أن المعــادلة الأولــى هي في الواقــع مجرد معــادلة الاستمــرارية للســائل. أمّا المعــادلة الثــانية فتؤول إلــى معــادلة أويلــر (أو بشــكلٍ مــكافئ إلــى قانــون نيــوتن) إذا تــمّ ضبط الــلزوجة علــى الصفر، إذ ضــمن الصــورة الأويلــريّة لميكانيــك الموائــع يعطي الجــانب اليســار من المعــادلة والممثِّــل للاشتقــاق الجسيــمي التســارعَ، بينمــا يعبِّــر عن القــوّة المؤثِّرةِ الجــانبُ الأيمن

ما يتعلمه المرء من مقــاربة معادلة بولتزمان لمثل هذه المنظــومة الظواهــريّة من المعــادلات العيــانية هــو أن البارامتــرات الظواهريّة نفسَــها يمكن فهمها على أنها متوسّــطات معينة على درجــاتٍ مجهرية من الحــرية، وبالتالي يمكن حســاب التصحيحــات عليها من حيث المبدأ بطــريقة منهجية

نــرى أن مثــل هذه المعــادلات تأخذ شــكلًا معقدًا إلــى حدّ ما، ومــع ذلك فــهي ليست ســوى تعبيرٍ عن عــدد من قــوانين المصــونيّة البسيطة المُــطبَّقة على منظــومةٍ متعــدّدة الجسيمــات، حيث تُمثِّــل الجــوانب اليســرى فقــط النقــلَ بــسبب الحمــل الحــراري الحــرّ للتــدفق المتضــمِّن إجــراءَ عمــليّة اشتقــاق جسيمي، بينمــا تحتــوي الجوانب اليمنــى على تأثيــرات الإجهاد والــلزوجة، ما يؤدي إلى ســلوك انتشــاري مُعقَّد للمائع قــد يؤدي إلــى تــدفّق مضطّــرب دوّاميًّا

يمــكن استخــدام المعــادلات لــوصف تدفقــات الســوائل عبــر الأنــابيب، وفي الأنهــار، وحــول السفن أو أجنــحة الطائــرات. في حــالات خــاصة، من الممــكن إجــراء تبسيطات كبيرة للمعــادلات. على سبيل المثال، يمــكن بســهولة اشتقاق معــادلة برنــولي التي تربط بين الضغط والســرعة لتدفق الســوائل الثابتة، وكذلك معادلة انتشــار الموجات الصــوتية، لأنها مجرد موجات كثــافة طــولية. كمــا أنــه عند ضبــط حقل الســرعة u علــى الصفــر، تؤول معادلة الطاقة بشــكل أســاسي إلــى معــادلة الانتثار لتــدفق الحرارة

موضوعة الاختيار

د. عمران دلول
مدرس في الجامعة الافتراضية السورية SVU

تُعتبــر موضوعة الاختيار واحــدةً من أكثر القضايا جدليةً في الرياضيــات من حيث أنّ نتائجها تتصادم مع الحدْس أو الفطــرة. تنــص هذه الموضــوعة ببســاطة على أنه إذا كانت لدينا تشــكيلةً من المجموعات المنفصلة وغير الخــالية، فعندها يمــكن "اختيار" عنصر من كل مجموعة وتشــكيل "مجموعة" ذات عناصر غير مكرَّرة

أليــست هذه الموضــوعة واضــحةً بحــدّ ذاتهــا ولاتستــحق المنــاقشة؟

في الــحقيقة، تبــدو هذه الموضوعة للوهــلة الأولى كذلــك ، لــكن إن أمعنّــا النظر ستظهر الإشــكالية. إننا نحن البشــر كائنــات محدودة نــعيش في عالمٍ محدود، لذا من الطبيــعي أن نتخيــل أنّ هذه الموضــوعة تعبــر عن تشــكيلة منتــهية من المجموعــات غيــر الخــالية والمنفصــلة. ففي هذه الحــالة ستغــدو الموضــوعة

استعارة راسل حول أهمية موضوعة الاختيار، ففي حال غياب القانون نكون أمام ورطة

مقبولة ولاتحتاج للذكر. لكن إن تأملنا حالة أنّ التشكيلة مؤلفة من عدد "غير منتهٍ" من المجموعات المنفصلة فستكون المسألة أكثر تعقيداً. ولتوضيح الأمر لابدّ من ذكر استعارة الفيلسوف وعالم الرياضيات العريق برتراند رسل والتي نوجزها كما يلي

لنتخيل لو أنّ لدينا تشكيلةً لانهائيةً من الجوارب وطُلِبَ انتقاء جورب واحد من كل زوج، فعندها ستكون المسألة بسيطة حيث سنختار الجورب " اليساري" من كل زوج وبذلك يتم المطلوب. لكنّ المشكلة تكمن في حالة أنّ تشكيلة الجوارب هذه متجانسة، فعندها "سيصعب" الاختيار ونكون أمام مشكلة. يعود السّبب في ذلك لغياب "القانون" الذي بموجبه يتم الاختيار، ففي حالتنا كان القانون هو الجورب "اليساري". أمّا في الحالة الثانية، وفي ظل غياب هذا القانون أصبح الأمر مربكاً

لتلافي هذا الأمر، تمّ وضع موضوعة الاختيار التي تضمن "اختيار" عنصر من كل مجموعة من دون وجود "قانون" للاختيار وبغض النظر عن عدد عناصر التشكيلة (فقد تكون غير قابلة للعد!) والحصول على مجموعة من دون إنشاء مسبق كما في حالة الاستقراء والعلاقات التراجعية

إذاً نفهم من هذه المناقشة أنّ موضوعة الاختيار تضمن وجود مجموعة ذات عناصر متمايزة من "أية تشكيلة من مجموعاتٍ منفصلة غير خالية" من دون الحاجة لقانون للاختيار وهذا الوجود مضمون من دون عملية إنشائية سواءً بالاستقراء أو بعلاقاتٍ تراجعية أو غير ذلك، الأمر الذي أثار حفيظة عدد كبير من الرياضيين الذين تمسكوا بفكرة الإنشاء

لقد كان أول تطبيق لهذه الموضوعة من قبل الرياضي الإيطالي فيتالي Vitali بالشكل التالي لنعرّف على المجال

$$[0,1]\subset R$$

علاقةً بالشكل التالي:

$$x\sim y\Leftrightarrow x-y\in Q.$$

فعندها نجد أنّ هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ. وبذلك تمثل صفوف تكافؤ هذه العلاقة "تجزئةً" للمجال الواحدي. إذاً تشكيلة صفوف التكافؤ هذه تلبي غرضنا من حيث أنّها تشكيلة من المجموعات المنفصلة غير الخالية، حيث يأتي دور موضوعة الاختيار لتضمن وجود " مجموعة" عناصرها مختارة من كل صف تكافؤ وذلك على الرغم من أنّ هذه التشكيلة " غير قابلة للعد". ما يميّز هذه المجموعة هو الآتي

- غير قابلة للعد.

- غير قابلة للقياس وفق مفهوم لوبيغ. الأمر الذي يجعلها تتغير بالطول عند إجراء دوران أو انسحاب لها وهذا ما يتعارض من الحس العام من حيث أننا معتادون على فكرة أنّ المجموعة يبقى

طولهـا على حاله عند إجراء أو انسـحاب أو دوران لها ولاحقـاً استخدمهـا بانـاخ وتارسـكي في برهـان حقيقة مثيـرة للدهشة وهي ماندعوها اليوم بمفارقة بانـاخ – تارسـكي والتي تنص على أنـه إذا كانت لدينا كـرةً صـلبة وقمنـا بتفكيكها لخمـسة أجزاء ثـمّ قمنا بتدويـر هذه الأجزاء وإعـادة تجميعها، فسنحصل على كـرتين كل منهمـا تشـابه الأصـل بـدلاً من واحـدة. يكـمن الأمـر في أنّ القطـع الخمسة هذه عبـارةً عن مجموعـاتٍ غيـر قابلة للقيـاس تم إنشـاؤها بناءً على موضـوعة الاختيـار. ولذلـك عنـد تحريـك هذه القطع سيتغيـر حجمها أو طولهـا وذلك لأنّ خـاصية اللاتغير أو الصمـود Invarience في القيـاس تنحصر فقط في مجموعـات لوبيغ

أوجه موضوعة الاختيار

هنـاك عبـارات مكافئة لـهذه الموضـوعة ونذكر منها مبـدأ التـرتيب الحسـن Well-Order Principle ذلـك المبـدأ الذي استخدمـه جـورج كانتور لتعـريف الأعداد الترتيبية والأساسـية Ordinals and Cardinals وذلك " لعـد" عناصـر أية مجمـوعة من خلال تذييـل عناصرها بأدلة مأخـوذة من عددٍ تـرتيبيٍ ما، حيث نعني بالتذييل هنا إنشـاء تقابل واحد لواحد ما بين المجموعة وعناصر عـددٍ تـرتيبيٍ ما. فقد عرّف كانتور العـدد الترتيبي بأنه مجمـوعة مـرتبة جيداً بـعلاقة الانتماء بـحيث أنّ عنصر فيهـا عبـارة عن مجمـوعة جزئية فيها. ولعـلّ من بين التطبيقات هو إنشـاء مبدأ الاستقـراء العابر للمنتهي Transfinite Induction ذلك المبدأ الواسـع الاستخدام في الهنـدسة الذي يتيـح لنـا "عـد" مستقيمـات المستوي وتطبيق هذا المبدأ لإنشـاء مجموعة مؤلفة بالضبـط من عنصرين من كل مستقيم Two-point Set. المـدهش أنّ هذه المجموعة غيـر قابلة للقياس وفق مفهوم لـوبيغ. إضافةً للعديـد من الأمور الهامة في نظـرية المجموعـات والهنـدسة، حيث استخدم كوديل هذا المبـدأ لـرد الرياضيات بأكملهـا لنظام المجموعات حيث رتّبـه لطبقـاتٍ بناءً على هذا المبـدأ. يُدعى حالياً هذا التسلسل بتسلسـل فون-نيومان للمجموعات The von Neumann hierarchy of sets

وأيضـاً هناك عبـارة مـكافئة وهي تمهيدية زورن Zorn's Lemma واسـعة الاستخـدام ولاسيمـا في برهـان أنّ لكل فضـاءٍ شـعاعيَ "قاعدة"

نخلـص من هذه المنـاقشة لتبيـان أنّ موضـوعة الاختيـار " متأصـلة" في الرياضيـات. بـل إنهـا جوهـر وليـست "عَـرَضْ" لمـا لهـا من الأهـمية الكبـرى في إثبـات العديـد من القضايـا الريـاضية. لطالمـا كانت الرياضيـات عديـمة الجـدوى من دون اللانهـاية فيها، فإنهـا ستكـون كذلـك في غيـاب هذه الموضـوعة

مراجع للاستزادة:

1-Ivan Khatchatourian, The Axiom of Choice, available at: https://www.math.utoronto.ca/ivan/mat327/docs/notes/11-choice.pdf
2-Avery Robinso, THE BANACH-TARSKI PARADOX available at: https://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Robinson.pdf.
3- SYLVIA DURIAN, SOME TRANSFINITE INDUCTION DEDUCTIONS, available at: http://math.uchicago.edu/~may/REU2018/REUPapers/Durian.pdf
4- BURAK KAYA, SET THEORY, Lecture notes, available at: https://users.metu.edu.tr/burakk/lecturenotes/320lecturenotes.pdf.
5- Vitali Set, https://en.wikipedia.org/wiki/Vitali_set